代数的Riccati 方程式の解法について (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications)

AUTHOR(S):

北本, 卓也

数理解析研究所講究録
1514 巻 2006 年 29-32

代数的 Riccati 方程式の解法について

北本卓也
T. Kitamoto
山口大学
Yamaguchi University*

1 序論

代数的 Riccati 方程式は、H_2 最適制御、H_∞ 制御等に用いられる制御系設計で非常に重要な方程式である。これは行列を解とする行列の方程式であるが、その解法が古くから研究され現在では固有値と固有ベクトルに基づく解法が広く使われている。この解法は数値行列に対しては非常に有効であるが、行列にパラメータ等の不定元が含まれる場合には適用できない。この問題に対し、筆者はこれまで、解をべき級数解として求める算法を提案してきた。これは実際問題にはべき級数解で十分なことが多いためであるが、べき級数の収束半径を求める場合など、べき級数の定義多項式を計算したい場合があり得る。そこで本稿では、このべき級数の定義多項式を計算する算法について論じる。

2 代数的 Riccati 方程式とは

代数的 Riccati 方程式では、$n \times n$ 行列 A と $n \times n$ 対象行列 W, Q が与えられたとき

$$PA + A^T P - PWP + Q = 0 \tag{1}$$

を満たす行列 P を求める。序論で述べたように、この方程式は制御系設計において H_2 最適制御、H_∞ 制御等に用いられる重要な方程式である。${}_{2n}C_n$ 個の解を持つが、正定対象なものが重要である（正定対象なものは 1 つに限られる）。

例として H_2 最適制御系設計を考えると、制御対象が

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{2}$$

で与えられたとき、システムを安定にし、かつ評価関数

$$\int_0^\infty \left(x^T Qx + u^T Ru\right)\ dt \tag{3}$$

を最小化する入力 u は $u = -B^T Px$ で与えられることが知られている。ここで P は代数的 Riccati 方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{4}$$

の解である。

*kitamoto@yamaguchi-u.ac.jp

3 代数的 Riccai 方程式の解法 (記号的)

先に述べたように、与えられた行列 A, W, Q が不定元を含む場合、従来の解法はつかえない (固有値、固有ベクトルを計算するため)。ここでは、グレブナー基底を用いた解法を挙げる。

1. $P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$ と置き、代数的 Riccati 方程式より $\frac{n(n+1)}{2}$ 個の代数方程式を導く。

2. 上の $\frac{n(n+1)}{2}$ 個の代数方程式の辞書式順序のグレブナー基底を計算する。

上記の算法は不定元を含んだシステムに対しても適用できるが、行列のサイズ n が大きくなると ($n > 3$) 事実上適用が不可能になってしまう。そこである程度次数が大きいシステムに対しても、適用可能な算法を考える。

4 代数的 Riccai 方程式の解法 (べき級数)

ここでは、代数的 Riccati 方程式のべき級数解に基づいた解法について述べる。基本的なステップは以下のようになっている。

1. 代数的 Riccai 方程式のべき級数解を計算する。

2. べき級数解からその定義多項式を計算する。

上記のステップ 1 は、従来の数値的計算法において、固有値、固有ベクトルを近似固有値、近似固有ベクトル (固有値、固有ベクトルの変数に対するべき級数展開) に置き換えることで実現できる。詳細は参考文献 [1],[2],[3] を参照せよ。

ステップ 2 を定式化すると、以下のようになる。

$$\begin{array}{l} \text{べき級数解 } \alpha(k) = \alpha_0 + \alpha_1 k + \cdots + \alpha_m k^m \text{ を用いて、その定義多項式} \\ f(x,k) = f_0(k) + f_1(k)x + \cdots + f_r(k)x^r \text{ の } f_i(k)\ (i = 0, \cdots, r) \text{ を求めよ} \end{array} \tag{5}$$

このために、以下の 2 つ算法を提案する。

4.1 算法 A

べき級数解の定義式の計算法 (A)

1. 2^n 個のべき級数解 ($\alpha_i(k)\ i = 1, \cdots, 2^n$) 全てを計算する。

2. $f(x,k) = f_r(k)(x - \alpha_1(k)) \cdots (x - \alpha_{2^n}(k))$ を展開して $f(x,k)$ を求める。

この方法は下記の特徴を持っている。

- 2^n 個のべき級数解全てを求める必要がある。
- べき級数解の次数は $\max_i(\deg(f_i(k)))$ で十分
- べき級数解さえ求まれば、後は式の展開のみ

4.2 算法 B

この算法では、参考文献 [4] で示されているべき級数の係数が打ち消しあう性質を利用する。

べき級数解の定義式の計算法 (B)

1. 1 つのべき級数解 $\alpha(k)$ のみを計算する。
2. $f_0(k) + f_1(k)\alpha(k) + \cdots + \alpha_r(k)\{\alpha(k)\}^r = 0$ の各べきをベクトルで表し、ガウスの消去法を用いて $f_i(x,k)$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ を求める。

この方法は下記の特徴を持っている。

- 1 個のべき級数解が求まれば十分である。
- べき級数解の次数は $\{1 + \max_i(\deg(f_i(k)))\}(1 + r)$ が必要
- べき級数解を求めた後、ガウスの消去法が必要

5 数値例

5.1 数値例 1

A, B, Q, R を以下のように置いたとき、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \tag{6}$$

代数的 Riccati 方程式 (4) の解 P の (1,1) 要素の定義多項式を上記の算法 A, 算法 B で計算すると次の結果を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{方法 A}: & 20029 + 22706k + 6241k^2 + (-29132 - 15884)k + (9778 - 162k)x^2 + 204x^3 + x^4 \\ \text{方法 B}: & 2.135108 + k - 1.21236x - 0.010112395x^2 \end{array} \tag{7}$$

方法 A と方法 B で計算結果が異なっているが、計算のアルゴリズム上、方法 A では整係数上の既約多項式、方法 B では実係数上の既約多項式を計算しているからであり、その意味でともに正しい結果を出している。

5.2 数値例 2

A, B, Q, R を以下のように置いたとき、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} k+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \tag{8}$$

代数的 Riccati 方程式 (4) の解 P の (1,1) 要素の定義多項式を上記の算法 A, 算法 B で計算すると、算法 A でのみ現実的な時間内に計算が可能だった (計算結果は長いので省略)。

6 結論

代数的 Riccati 方程式の定義多項式を計算する算法を 2 つ示した。1 つは整係数上、もう 1 つは実係数上の既約多項式を計算する方法であり、整係数上の既約多項式を計算する方法では、辞書式順序のグレブナー基底を計算して求められるものと同じものが、より効率的に計算できる。今後の課題は、より詳細な数値実験と計算誤差による影響の解析である。

参 考 文 献

[1] 北本: 近似固有値、固有ベクトルとその最適制御への応用, 電子情報通信学会論文誌, **J78-A**(4), 1995, 531–534.

[2] 北本: 近似代数を用いた H_2 最適制御系の解析と設計, 電子情報通信学会論文誌, **J81-A**(2), 1998, 289–292.

[3] 北本: 代数的 Riccati 方程式のべき級数解の計算法について, 電子情報通信学会論文誌, **J81-A**(3), 1998, 445–447.

[4] T. Sasaki and M. Masaki: A unified method for multivariate polynomial factorizations, Japan J. Indus. Appl. Math., **10**, 1993, 21–39.